ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 99

Α2. α) Ψ

β) Σχολικό Βιβλίο σελ. 35

Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 216

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$, $x \neq 0$

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R−{0} με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3} \text{ , } x \neq 0$$

x	$-\infty$ $\quad$ -2		0 $\quad$ $+\infty$
x^3+8	$-$	0 $\quad$ $+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	0 $\quad$ $-$	$+$
f	↗	↘	↗

ΤΜ

$f(-2) = -3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3+8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-8|} \Leftrightarrow x = -2$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3+8) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2,0)$

Επειδή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$.

Ομοίως, $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$.

B2. Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο R−{0} με

$$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2(x^3+8)}{x^6} = \frac{3x^5 - 3x^5 - 24x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$
f	∩	∩

άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, οπότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B3. • <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες</u>

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Τότε η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, η οποία είναι μοναδική, επειδή η f είναι συνεχής στο R−{0}.

• <u>Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1 \text{ , άρα } \lambda=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0, \text{ άρα } \beta=0$$

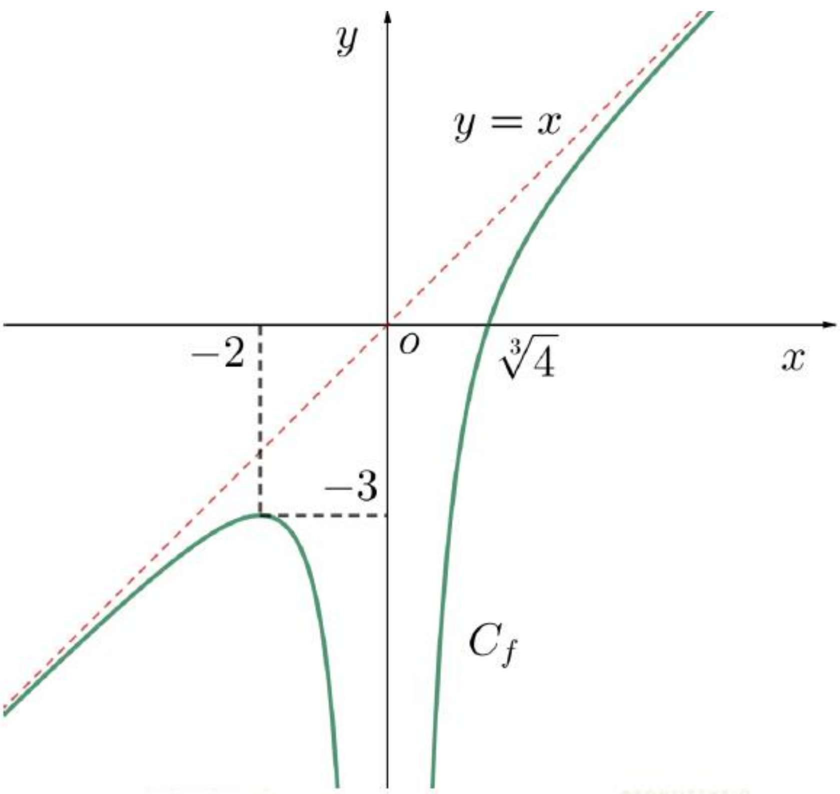
Άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$ -2		0 $+\infty$
$f''(x)$	−	−	−
$f'(x)$	+ 0	−	+
f	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

T.M
$f(-2) = -3$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εστω $\ell = 8m$ το μήκος του σύρματος και $\ell_1 = x$, $\ell_2 = 8-x$ τα μήκη του τετραγώνου και του κύκλου αντίστοιχα.

Τότε αν E_1 το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς $x/4$, ισχύει ότι:

$$E_1(x) = \frac{x^2}{16}$$

Ενώ για τον κύκλο ακτίνας r, το μήκος της περιφέρειας του είναι $\ell_2 = 2\pi r$.

Συνεπώς $8-x = 2\pi r \Leftrightarrow$

$$r = \frac{8-x}{2\pi}$$

Αρα αν E_2 το εμβαδόν του κύκλου, τότε $E_2(x) = \pi r^2 \Leftrightarrow$

$$E_2(x) = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Οπότε $E(x) = E_1(x) + E_2(x)$,

με $x>0$ και $\dfrac{8-x}{2\pi} > 0$

άρα,

$$E(x) = \frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2\cdot\pi}{4\pi^2} = \frac{\pi\cdot x^2+4\cdot(8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi\cdot x^2+4\cdot\left(64-16x+x^2\right)}{16\pi}$$

$$E(x) = \frac{\pi\cdot x^2+256-64x+4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}, \quad x\in(0,8)$$

Γ2. Από Γ1 ερώτημα το άθροισμα των εμβαδών είναι η συναρτηση

$$E(x)=\frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x\in(0,\, 8)$$ που είναι παρ/μη ως πολυωνυμική

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi} = \frac{2((\pi+4)x-32))}{16\pi}.$$

Η $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{32}{\pi+4}$

Η $E'(x) > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32>0 \Leftrightarrow (\pi+4)x>32 \Leftrightarrow x> \dfrac{32}{\pi+4}$

Η $E'(x) < 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32<0 \Leftrightarrow (\pi+4)x<32 \Leftrightarrow x< \dfrac{32}{\pi+4}$

και ισχύει ότι $0 < \dfrac{32}{\pi+4}$ και $\dfrac{32}{\pi+4} < 8$ αφού $32 < 8\pi+32$ δηλ. $0 < 8\pi$ αληθές

x		0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	
E′(x)			−	0	+		
E			↘		↗		

Η $E'(x)<0$ στο $(0, 32/(\pi+4))$ και συνεχής στο $x_1= 32/(\pi+4)$ άρα η E γν. φθίνουσα στο $(0, 32/(\pi+4)]$.
Η $E'(x)>0$ στο $(32/(\pi+4), 8)$ και συνεχής στο $x_1= 32/(\pi+4)$ άρα η E γν .αύξουσα στο $[\, 32/(\pi+4), 8)$.
Άρα θέση τοπικου ελαχιστου η $x_1=\dfrac{32}{\pi+4}$.
Επειδή η διάμετρος δ του κύκλου είναι 2r και καθώς

$$r=\frac{8-x}{2\pi} \text{ ισχύει } \delta=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)} \text{ άρα } \delta=\frac{8}{\pi+4}$$

Τότε η πλευρα α του τετραγώνου είναι ,

$$\alpha=\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}=\delta$$

Γ3.

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}, \quad x\in(0, 8)$$

Στο $\Delta_1=\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ η E(x)είναι γν.φθίνουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της στο Δ_1 ειναι:

$$E(\Delta_1)=\left[\, E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

Επειδη $\dfrac{16}{\pi}>5>\dfrac{16}{\pi+4}$ αφού $16>5\pi$ $(\pi=3{,}14<3{,}2$ τοτε $5\pi<5\cdot 3{,}2 \Rightarrow 5\pi<16)$
και $5\pi+20>16 \Leftrightarrow 5\pi>-4$ (αληθές)
Συνεπώς το $5\in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_0 \in \Delta_1$ με $E(x_0)=5$ και καθώς η E είναι γν. φθίνουσα στο Δ_1 η ρίζα x_0 θα είναι μοναδική στο Δ_1.
Επίσης στο Δ_2 η E(x) γν. αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της στο Δ_2 είναι :

$$E(\Delta_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to 8^-} E(x)=\frac{(\pi+4)64-64\cdot 8+256}{16\pi}=\frac{4(\pi+4)-32+16}{\pi}=\frac{4\pi}{\pi}=4$$

Ομως $5\notin E(\Delta_2)$ άρα τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0\in\Delta_1$ με $E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

$$f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2,\quad x\in R,\quad \alpha>1$$
$$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x,\quad x\in R$$
$$f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2(e^{x-\alpha}-1),\quad x\in R$$
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$$
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow x>\alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	⌒		⌣

Για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το $(\alpha,f(\alpha))$ δηλαδή $(\alpha,\ 2-\alpha^2)$.

Δ2. Αν $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ τότε $f'(\Delta_1)\overset{f'\text{ συνεχής}}{\underset{f'\downarrow\text{στο }\Delta_1}{=}}\left[f'(\alpha),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,\ +\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x-\alpha}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$

$0\in f'(\Delta_1)$ άρα υπαρχει $x_1\in(-\infty,\alpha)$ με $f'(x_1)=0$ και η f' γνήσια φθίνουσα στο Δ_1 άρα μοναδικό

Για

$$x<x_1<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)$$
$$f'(x)>0$$

Για

$$x_1<x<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1)>f'(x)$$
$$0>f'(x)$$

Αν $\Delta_2=[\alpha,+\infty)$ τότε $f'(\Delta_2)\overset{f\text{ συνεχής}}{\underset{f'\uparrow\text{στο }\Delta_2}{=}}\left[f'(\alpha),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,\ +\infty)$

$$f'(x)=e^{x-\alpha}\left(2-\frac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x-\alpha}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x-\alpha}}=0$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)=2 \quad\text{και}\quad \lim_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$$

$0\in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$ και η f' γνήσια αύξουσα στο Δ_2 άρα μοναδικό

Για

$$\alpha<x_2<x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_2)<f'(x)$$
$$0<f'(x)$$

Για

$$\alpha<x<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)$$
$$f'(x)<0$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+		−		+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$, άρα $f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$, άτοπο, αφού $\alpha>1$, άρα $1 \notin [\alpha, x_2]$.

Δ4. Για $\alpha=2$, $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in R$, $f'(x)=2e^{x-2}-2x$, $x\in R$.

Η f κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(2,f(2))$ στο $(2,+\infty)$.

Η εφαπτομένη στο $(2,f(2))$ είναι:

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+2=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+2$

Για $x\in[2,3]$, $f(x)\geq -2x+2$

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$$

Το "=" ισχύει μόνο στο 2, άρα:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \quad \text{με}$$

x	u
2	0
3	1

$$\int_{2}^{3} -2(x-1)\sqrt{x-2}dx$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x-2}$, οπότε $u^2=x-2$, άρα $2udu=dx$.

Επομένως

$$\int_{0}^{1} (-2(u^2+2-1)\cdot u\cdot 2u)\, du=$$

$$\int_{0}^{1} (-4u^2(u^2+1))\, du=\int_{0}^{1}(-4u^4-4u^2)du=\left[-\frac{4u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}\right]_0^1=$$

$$-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=\frac{-12-20}{15}=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_{2}^{3} f(x)\sqrt{x-2}\, dx > -\frac{32}{15}$.