ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΟΥΓΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2. α) Λ

β) Έστω $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

αφού :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1 .$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 73

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Έχουμε την $f(x)=\ln x$ με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(0,+\infty)$

Και την $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $B=\mathbb{R}-\{1\}$

Β1. $\Gamma=\left\{\begin{matrix} x\in B \\ g(x)\in A\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ x\cdot(1-x)>0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ 0<x<1\end{matrix}\right\}=(0,1)$

$$f(g(x))=\ln(g(x))=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ με } x\in(0,1)$$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων επομένως έχουμε:

$$h'(x)=\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{x\cdot(1-x)}>0,\ \text{αφού}\ \ x\in(0,1)$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως και «1 – 1» άρα ορίζεται η αντίστροφη της.

Θέτουμε $h(x)=y\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y\cdot(1-x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=e^y-x\cdot e^y\Leftrightarrow x\cdot e^y+x=e^y\Leftrightarrow x\cdot(e^y+1)=e^y\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1},\ y\in\mathbb{R}$$

$$x\in(0,1)\Leftrightarrow 0<\frac{e^y}{e^y+1}<1\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε την $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$

B3. $\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς ΔΕΝ έχει ακρότατα αφού έχει και ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x\cdot(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\varphi''(x)\geq\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\Leftrightarrow 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow e^x\leq e^0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}x\leq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
φ	$\cup$		$\cap$

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και η φ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

Η φ εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$ το $(0, \varphi(0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

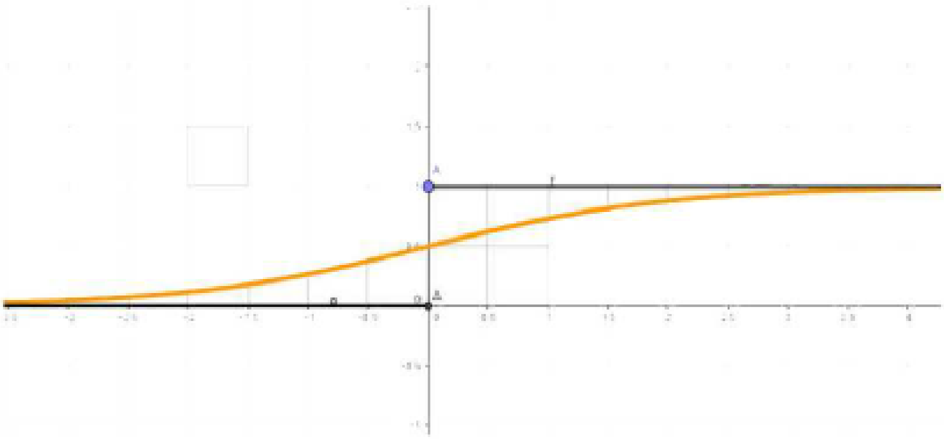
Β4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$

Επομένως έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις

$y = 0$ καθώς $x \to -\infty$ και την $y = 1$ καθώς $x \to +\infty$

Η γραφική παράσταση της φ είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = -\eta\mu x,\ [0, \pi]$

$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x,\ [0, \pi]$

Έστω $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): \mathrm{y}-\mathrm{f}(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow \mathrm{y}-\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(x-x_0)$$

Το $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\in(\varepsilon): -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0+x_0\cdot\sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)+\eta\mu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση: $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$

Παρατηρούμε με αντικατάσταση ότι: $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$

$$g'(x)=-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $g'(x)<0$

Για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι: $g'(x)>0$

x	0	$\pi/2$	π
$g'(x)$	-		+
g	↘		↗
	T.M	T.E	T.M

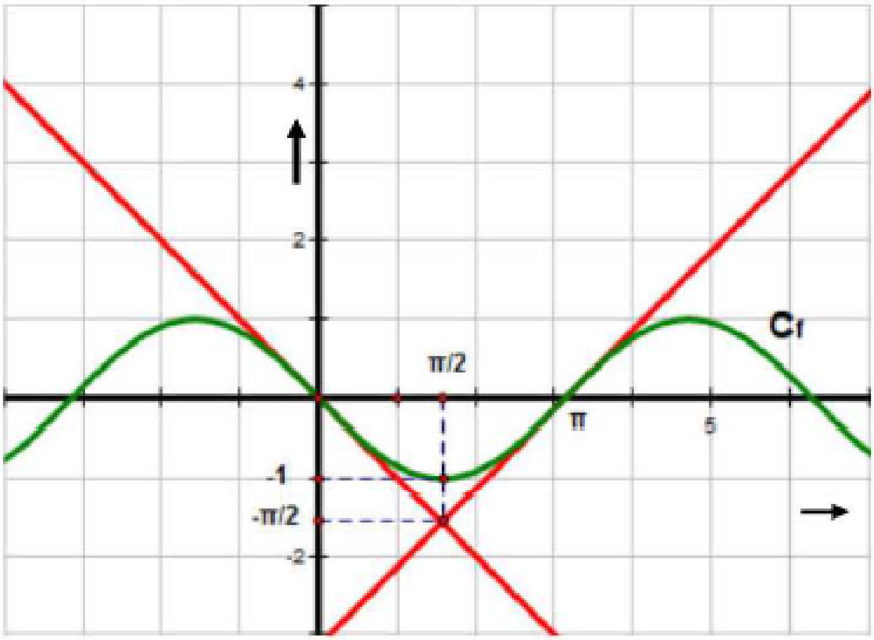
Η g συνεχής στο $[0,\pi]$ με $g_{max}=g(0)=g(\pi)=0$

Άρα μοναδικές λύσεις $x=0$ και $x=\pi$

Συνεπώς οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$

Γ2.



Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = \eta\mu x > 0$ **για** $x \in (0, \pi)$ οπότε f κυρτή $[0, \pi]$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα.

$A\rho\alpha\ f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) + x \geq 0$

$$\gamma\iota\alpha\ x \in [0, \pi]$$

$\kappa\alpha\iota\ f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) + x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\,dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}\ \tau\mu$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} (-f(x))\,dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2\ \tau\mu$$

Επομένως έχουμε $\frac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \left[\dfrac{1}{f(x) - x + \pi} \cdot (f(x) + x)\right] = +\infty$

Διότι $\lim\limits_{x \to \pi} (f(x) + \pi) = \lim\limits_{x \to \pi} (-\eta\mu x + \pi) = \pi$ και $f(x) - x + \pi > 0$ για $x \in (0, \pi)$ επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

Γ4. Είναι $f(x) > x - \pi,\ x \in [1, e]$ απο το ερωτημα Γ2 (το ίσον ισχύει μόνο για $x = \pi > e$)

οπότε $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, x \in [1, e]$ άρα και

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > [x - \pi \ln x]_1^e = e - \pi - (1 - 0) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e - \pi - 1$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in [-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών και στο $x \in [0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών.

Είναι για $x \neq 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt[3]{x^4}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$ και $f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$ επομένως

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [-1,0)$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ αδύνατη καθώς $x \in [-1,0)$

Η f παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x) = \left(e^x \eta\mu x\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Είναι για $x \in [0,\pi]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$
$$e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Rightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \overset{\eta\mu x \neq 0}{\Rightarrow} \sigma\varphi x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Για $x \in (-1,0)$ είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}\right) = -\lim_{x\to 0^-}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

Για $x \in (0,\pi)$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x \cdot \eta\mu x - 0}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

Επομένως

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$ άρα δεν υπάρχει η παράγωγος στο $x_1 = 0$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος και τα σημεία στα οποία δεν παραγωγίζεται άρα $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}, x_1 = 0$

Δ2. Η f παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με $f'(x) = -\dfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} < 0$ άρα γνησίως φθίνουσα $[-1,0)$

Η f παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x) = \left(e^x \eta\mu x\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3\pi}{4}$

Έστω $g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ $x \in [0,\pi]$ η οποία διατηρεί σταθερό πρόσημο με $g(0) = 1 > 0$ και για

$x > \dfrac{3\pi}{4}$, $g(\pi) = -1 < 0$

Από πίνακα μονοτονίας έχουμε

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	-	+	-	
f	↘	↗	↘	
		Τ.Ε	Τ.Μ	

Επίσης η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα κλειστά άκρα των διαστημάτων

στο $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=\frac{3\pi}{4}$, $x_3=\pi$,

με σύνολο τιμών $f\left(\left[-1,\pi\right]\right)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Δ3. Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, της g, τον άξονα yy' και την ευθεία $x=\pi$ ισούται με:

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)\right|dx$$

Έστω $h(x)=\eta\mu x-e^{4x}$, $x\in\left[0,\pi\right]$

Για $0\le x\le\pi\Rightarrow 0\le 4x\Rightarrow e^0\le e^{4x}\Rightarrow 1\le e^{4x}$

Είναι για $x\in\mathbb{R}$ $\eta\mu x\le 1\Rightarrow \eta\mu x<e^{4x}\Rightarrow \eta\mu x-e^{4x}<0$

Αρα $h(x)=\eta\mu x-e^{4x}<0$

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot\eta\mu x-e^{5x}\right|dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x+e^{5x}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx+\int_0^{\pi}e^{5x}dx=I_1+I_2$$

Είναι

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\left(-e^x\right)'\cdot\eta\mu x\right)dx=\left[-e^x\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=0+\int_0^{\pi}\left(\left(e^x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=\left[e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\left(-\eta\mu x\right)\right)dx\Rightarrow \mathrm{I}_1=-e^{\pi}-1-\mathrm{I}_1\Rightarrow 2\mathrm{I}_1=-e^{\pi}-1\Rightarrow \mathrm{I}_1=\frac{-e^{\pi}-1}{2}$$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\frac{1}{5}\left[e^{5x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{5}\left[e^{5\pi}-1\right]$$

$$I_1+I_2=\frac{-e^{\pi}-1}{2}+\frac{1}{5}\left[e^{5\pi}-1\right]=\frac{2e^{5\pi}-7-5e^{\pi}}{10}$$

Δ4. $16\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot f(\mathrm{x})-e^{\frac{3\pi}{4}}(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 16\cdot f(\mathrm{x})-(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16\cdot f(\mathrm{x})=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}+(4\mathrm{x}-3\pi)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\mathrm{x})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}+\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\mathrm{x})=f_{\max}+\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{\max}=f(\mathrm{x})-\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\geq f(\mathrm{x})$$

Επομένως έχουμε:

$-\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\geq 0\Leftrightarrow(4\mathrm{x}-3\pi)^2\leq 0\Leftrightarrow(4\mathrm{x}-3\pi)^2=0\Leftrightarrow 4\mathrm{x}-3\pi=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$, δεκτή